PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE MP

Corrado Malanga - Luciano Pederzoli

Rev.: 1.2 - 22 / 10 / 2003
(Rev.: 1.1 - 25 / 09 / 2003)

[nel testo questa grafia è riservata all'analisi dimensionale ed ai relativi commenti]

Nel seguito si adotteranno le seguenti convenzioni:

c = velocità della luce (dall'SI)	*[$l\ t^{-1}$]*
f = frequenza di oscillazione (dall'SI)	*[t^{-1}]*
T = **1 / f** = periodo di oscillazione (dall'SI)	*[t]*
e = carica elettrica unitaria (dal Sistema CGS)	*[$(l^3 m\ t^{-2})^{1/2}$]*
h = costante di Planck (dall'SI)	*[$l^2 m\ t^{-1}$]*

N.B.: Tutte le ĉ utilizzate nel testo sono costanti adimensionali, che non influiscono sul comportamento qualitativo delle formule, ma servono solamente per tener conto delle unità di misura adottate.

Heisemberg, con il suo principio di indeterminazione, afferma (dall'SI) che:

$$1)\ \Delta_T \ast \Delta_E \geq h/(4 \ast \pi)$$

con **h** = costante di Planck.

L'indeterminazione rappresenta l'incertezza $\Delta_T \ast \Delta_E$ nella definizione contemporanea dell'energia che una particella possiede e dell'istante temporale in cui la possiede.
Tale principio sancisce che, se si riduce a zero l'incertezza temporale, l'altra incertezza diventa di ampiezza infinita, rendendo impossibile la determinazione dell'energia della particella nell'istante prescelto.
Naturalmente il principio consente anche di invertire la situazione, rendendo impossibile la determinazione dell'istante in cui la particella possiede quell'esatta energia che è stata "prefissata".

La $\Delta_T \ast \Delta_E = h/(4 \ast \pi)$ viene spesso scritta in un altro modo:

$$2)\ \Delta_X \ast \Delta_p \geq h/(4 \ast \pi) = \hbar/2$$

con **X** = posizione, **p** = quantità di moto (**m**∗**v**) ed **ħ** = **h/(2∗π)**.

In questa forma l'indeterminazione $\Delta_X \ast \Delta_p$ rappresenta l'incertezza nella definizione contemporanea della posizione che una particella ha e della quantità di moto (il prodotto tra massa e velocità della particella stessa) che essa possiede in quella posizione.

Invece che:

$$2)\ \Delta_x * \Delta_p \geq h/(4 * \pi)$$

si potrebbe scrivere:

$$3)\ \Delta_x * \Delta_m * \Delta_v \geq h/(4 * \pi)$$

Espressione che implica l'incertezza nella definizione contemporanea della posizione **x**, della massa **m** e della velocità **v** della particella.

Si nota che l'equazione $\mathbf{\Delta_T * \Delta_E = h/(4 * \pi)}$ è del tipo $\mathbf{x * y = cost.}$, che rappresenta un'iperbole equilatera in un piano cartesiano del quale **T** (Tempo) ed **E** (Energia) siano gli assi coordinati. Di conseguenza si può dire che il principio implica l'esistenza di tali assi, tant'è vero che, ricorrendo ad essi, si ottiene una sua semplice rappresentazione grafica, come luogo dei punti che stanno oltre una curva limite costituita dall'iperbole stessa.

L'equazione **3)** mette in luce, tuttavia, l'importanza della posizione (spazio), della massa e della velocità (spazio/tempo). Complessivamente: spazio, tempo e massa. Ricordiamo, però, che massa ed energia, secondo Einstein, sono la stessa cosa, infatti:

$$4)\ E = m * c^2$$

Considerando la **1)** e la **3)** è lecito ritenere che gli assi cartesiani coinvolti non siano solo due (Tempo ed Energia), ma ne esista anche un terzo, quello dello Spazio.

Introduciamo, quindi, **l'ipotesi secondo la quale il principio di indeterminazione di Heisemberg rappresenta solamente la versione bidimensionale di un principio di indeterminazione più generale** (tridimensionale)**: di conseguenza, agli assi coordinati T ed E aggiungeremo, in un sistema cartesiano tridimensionale, l'asse spaziale S.**

In luogo di E, per l'energia adotteremo, d'ora in poi, il simbolo U, cosicché il principio di indeterminazione di Heisemberg diventerà, nelle due forme esaminate:

$$5)\ \Delta_T * \Delta_U \geq h/(4 * \pi)$$

$$6)\ \Delta_x * \Delta_U * \Delta_{S/T} \geq h/(4 * \pi)$$

Dimensionalmente: $[\, l^2 m\, t^{-1} \,]$.

Nel nuovo sistema di coordinate ortogonali **S**, **T** ed **U** nascono, pertanto, tre principi di indeterminazione **PARTICOLARI** (bidimensionali), uno per ciascuna coppia di assi coordinati (il primo è il classico principio di indeterminazione di Heisemberg).

Dal punto di vista dimensionale essi sono:

7) $\Delta_U * \Delta_T = \Delta_{Energia} * \Delta_{Tempo}$	$[\, l^2 m\, t^{-2}][\, t \,] = [\, l^2 m\, t^{-1} \,]$	Heisemberg
8) $\Delta_T * \Delta_S = \Delta_{Tempo} * \Delta_{Spazio}$	$[\, t \,][\, l \,] = [\, l\, t]$	
9) $\Delta_U * \Delta_S = \Delta_{Energia} * \Delta_{Spazio}$	$[l^2 m\, t^{-2}][\, l \,] = [\, l^3 m\, t^{-2}]$	

Da cui si ricavano facilmente **Δ_S , Δ_T e Δ_U**, le quali, collocandosi rispettivamente sugli assi **S**, **T** ed **U**, non possono avere altre dimensioni se non quelle di uno Spazio, di un Tempo e di un'Energia.

10) Δ_U = Energia $[\, l^2 m\, t^{-2}\,]$
11) Δ_T = Tempo $[\, t\,]$
12) Δ_S = Spazio $[\, l\,]$

Ma si può anche dire che:

13) Δ_U $[\, l^2 m\, t^{-2}] = [\, l^2 m\, t^{-1}][\, t^{-1}]$ **≥ (h * <u>frequenza</u>) = h*f**

Cioè **l'incertezza dell'Energia è proporzionale ad una frequenza** (**f**).

Allora perché **Δ_T** non deve essere proporzionale (secondo una costante che chiameremo **$\hat{c}_T$**) ad un periodo (**T**) e **Δ_S** (secondo una costante che chiameremo **$\hat{c}_S$**) ad una lunghezza d'onda (**λ**)?
La lunghezza d'onda vale velocità/frequenza e sembra del tutto lecito adottare, come velocità, **c**, cioè quella della luce.
Di conseguenza: **$\lambda = c/f = c{*}f^{-1}$**.

14) Δ_T	$[\, t\,]$	(<u>**periodo**</u>)	**≥ $\hat{c}_T{*}T$**	**= $\hat{c}_T{*}f^{-1}$**
15) Δ_S	$[\, l\,]$	(<u>**lunghezza d'onda**</u>)	**≥ $\hat{c}_S{*}\lambda$**	**= $\hat{c}_S{*}c{*}f^{-1}$**

La **13)** ha le dimensioni della classica relazione **E = h*f** , che esprime l'energia del fotone, ma vale anche $[\, l^2 m\, t^{-2}] = [\, m\,][\, l\, t^{-1}]^2$, con le dimensioni dell'altrettanto nota **$E = m{*}c^2$**, essendo, appunto, $[\, l\, t^{-1}]$ una **velocità** (vedere Dimostrazione 1)**.**

<u>**Δ_S , Δ_T e Δ_U possono essere interpretate come LE TRE GRANDEZZE CHE DEFINISCONO UNA PARTICELLA NEL DOMINIO S-T-U (Spazio-Tempo-Energia) e si può affermare che:**</u>

<u>**Δ_U è proporzionale ad una frequenza,**</u>
<u>**Δ_T è proporzionale ad un periodo e**</u>
<u>**Δ_S è proporzionale ad una lunghezza d'onda.**</u>

Facendo il prodotto delle dimensioni di **Δ_S , Δ_T** e **Δ_U** si ottiene:

16) $\Delta_S{*}\Delta_T{*}\Delta_U$ $[\, l\,][\, t\,][\, l^2 m\, t^{-2}] = [\, l^3 m\, t^{-1}]$

Dalle **10)**, **11)** e **12)** si ricavano anche i rapporti, caratteristici del dominio S-T-U:

17) Δ_S/Δ_T	<u>**velocità**</u>	$[\, l\, t^{-1}]$	$= [\, l\, t^{-1}]$
18) Δ_U/Δ_S	<u>**forza**</u>	$[\, l\, m\, t^{-2}]$	$= [\, l\, t^{-1}]\ [\, t^{-1}][\, m\,]$
19) Δ_U/Δ_T	<u>**potenza**</u>	$[\, l^2 m\, t^{-3}]$	$= [\, l\, t^{-1}]^2[\, t^{-1}][\, m\,]$

Se si adotta **c** (velocità della luce) al posto di $[\, l\, t^{-1}]$ ed **mc^2** al posto di $[\, l^2 m\, t^{-2}]$, si ricavano le:

$$
\begin{array}{llll}
20) & \Delta_S/\Delta_T & & = c \\
21) & \Delta_S/\Delta_U & = m{*}c^2/\lambda \;\; = m{*}c^2{*}f/c & = m{*}c{*}f \\
22) & \Delta_U/\Delta_T & & = m{*}c^2{*}f
\end{array}
$$

Ma analizziamo nuovamente relazioni **7)**, **8)** e **9)** dal punto di vista dimensionale:

$$
\begin{array}{ll}
14)\ \Delta_U{*}\Delta_S & [\,l^3 m\, t^{-2}] = [\,l\, t^{-1}]^3\ [\,t\,][\,m\,] \\
15)\ \Delta_U{*}\Delta_T & [\,l^2 m\, t^{-1}] = [\,l\, t^{-1}]^2\ [\,t\,]\ [\,m\,] \\
16)\ \Delta_T{*}\Delta_S & [\,l\,t] \qquad\ \ = [\,l\, t^{-1}]\ [\,t\,]\ [\,t\,]
\end{array}
$$

Si nota che **<u>$\Delta_U{*}\Delta_S$ ha le dimensioni di una CARICA ELETTRICA AL QUADRATO</u>** (vedere Nota), quindi vale **$\hat{c}_1{*}e^2$** , in cui **$\hat{c}_1$** rappresenta una generica costante di proporzionalità (scegliendo opportunamente le unità di misura, nulla vieta di renderla uguale ad 1).

$\Delta_U{*}\Delta_T$, invece, come si è visto, ha le dimensioni della costante di Planck (h).

Se, ancora una volta, in luogo di $[\,l\, t^{-1}]$, si assume il valore **c**, come è già stato fatto in precedenza, si ottiene, essendo **e** la carica dell'elettrone:

$$
\begin{array}{lllll}
17)\ \Delta_U{*}\Delta_S & \geq \hat{c}_S{*}h{*}c & & & = \hat{c}_1{*}e^2 \\
18)\ \Delta_U{*}\Delta_T & \geq \hat{c}_T{*}h & = \hat{c}_1{*}\hat{c}_T{*}e^2/(\hat{c}_S{*}c) & & = \hat{c}_2{*}e^2{*}c^{-1} \\
19)\ \Delta_T{*}\Delta_S & \geq c/f^2 & = \hat{c}_T{*}\hat{c}_S{*}c/f^2 & = \hat{c}_T{*}\hat{c}_1{*}e^2/(h{*}f^2) & = \hat{c}_3{*}e^2{*}\, f^{-2}{*}h^{-1}
\end{array}
$$

I prodotti **$\Delta_U{*}\Delta_S$** , **$\Delta_U{*}\Delta_T$** , **$\Delta_T{*}\Delta_S$** , come indicano i loro pedici, riguardano, rispettivamente, i "piani" **U-S**, **U-T** e **T-S**, e definiscono "superfici" che possono essere equiparate a quelle di cerchi, i cui raggi valgono:

$$
\begin{array}{llll}
20)\ \Delta_U{*}\Delta_S \to \text{area} \geq \hat{c}_S{*}h{*}c = \hat{c}_1{*}e^2 & \text{raggio} \geq h{*}(\hat{c}_S{*}c/\pi)^{1/2} & = (\hat{c}_1/\pi)^{1/2}{*}e \\
21)\ \Delta_U{*}\Delta_T \to \text{area} \geq \hat{c}_T{*}h \quad = \hat{c}_2{*}e^2{*}c^{-1} & \text{raggio} \geq h^{1/2}{*}(\hat{c}_T/\pi)^{1/2} & = (\hat{c}_2/\pi)^{1/2}{*}e/(c^{1/2}) \\
22)\ \Delta_T{*}\Delta_S \to \text{area} \geq c/f^2 \quad = \hat{c}_3{*}e^2{*}\, f^{-2}{*}h^{-1} & \text{raggio} \geq (1/f){*}(c/\pi)^{1/2} & = (\hat{c}_3/\pi)^{1/2}{*}(e/f){*}h^{1/2}
\end{array}
$$

Se **$\Delta_U{*}\Delta_S$ è** proporzionale al quadrato della carica elettrica elementare, è probabile che anche **$\Delta_U{*}\Delta_T$** sia proporzionale al quadrato di un altro parametro elementare (**magnetico?**), di valore pari a radice di **h** (oppure di valore pari alla carica elettrica elementare divisa per la radice di **h**), e che **$\Delta_T{*}\Delta_S$** sia proporzionale al quadrato di un ulteriore parametro elementare (**gravitazionale?**), di valore pari a radice di **c** divisa per **f** (oppure di valore pari alla radice di **h** moltiplicata per la carica elettrica elementare e divisa per **f**).

Come conseguenza di quanto detto, si può definire **IL PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE GENERALE** (tridimensionale):

$$23)\ \Delta_S{*}\Delta_T{*}\Delta_U \geq \hat{c}_S{*}\hat{c}_T{*}h{*}c{*}f^{-1} = \hat{c}_4{*}h{*}c{*}f^{-1} = (\hat{c}_1{*}\hat{c}_2{*}\hat{c}_3{*}h{*}c/\pi^3)^{1/2}{*}(e^3/f) = \hat{c}_5{*}e^3{*}f^{-1}$$

La **23)** è il prodotto di tre **Δ**, cioè una specie di "volume", che può essere equiparato a quello di una sfera ed espresso da un opportuno "raggio" elevato alla terza potenza.
Tale "raggio" **Δ_{STU}** vale:

$$r_{stu} \geq (1{,}5{*}\hat{c}_4{*}h{*}c)/(2{*}\pi{*}f)^{1/3} = [(3{*}\hat{c}_4{*}h{*}c)/(2{*}\omega)]^{1/3} = (\hat{c}_6{*}h{*}c)/\omega^{1/3}$$

In alternativa vale anche:

$$\mathbf{r_{stu} \geq e{*}(1{,}5{*}\hat{c}_5)/(2{*}\pi{*}f)^{1/3} = e{*}[(3{*}\hat{c}_5)/(2{*}\omega)]^{1/3} = \hat{c}_7{*}(e/\omega^{1/3})}$$

Essendo **ω** (pulsazione o velocità angolare) pari a **$2{*}\pi{*}f$**.

È importante notare che:
ω È UN PARAMETRO CARATTERISTICO DELLA ROTAZIONE.
SECONDO IL PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE GENERALE MP IL PRODOTTO DELLE INCERTEZZE DI LUNGHEZZA, TEMPO ED ENERGIA È ALMENO PARI AD UNA COSTANTE DIVISA PER UNA FREQUENZA.

Una particella soggetta a tale principio si comporterebbe, praticamente, come una palla (con dimensioni dipendenti dalla frequenza) fatta di gomma sottilissima ed estremamente elastica, piena d'acqua e sospesa a mezz'altezza in una vasca d'acqua. Schiacciandola, la palla si deforma e si allarga, tanto più quanto più viene schiacciata. Poiché la quantità d'acqua in essa contenuta è sempre la stessa, il suo volume rimane costante, ma il suo aspetto può cambiare moltissimo.

PROSPETTIVE

- *Per principio di indeterminazione di Heisemberg è già stata dimostrata la validità lungo ciascuno dei tre classici assi dello Spazio. Esistono, infatti, tre componenti dello Spazio:* ***Sx****,* ***Sy*** *ed* ***Sz*** *(di solito chiamate semplicemente:* ***x, y*** *e* ***z)****, per ciascuna delle quali vale il suddetto principio. È, tuttavia, ipotizzabile che anche per il Tempo esistano tre componenti:* ***Tx****,* ***Ty*** *e* ***Tz****. Per l'Energia esisteranno, di conseguenza, altre tre componenti:* ***Ux****,* ***Uy*** *ed* ***Uz****. In totale nove componenti dimensionali: 3 per lo Spazio, 3 per il Tempo e 3 per l'Energia.*

- *Poiché* ***ω*** *è un parametro caratteristico della rotazione e nelle 13), 14) e 15) appaiono frequenza, periodo e lunghezza d'onda, nasce spontanea l'ipotesi che F, T e λ possano riferirsi allo stesso fenomeno, schematizzabile con una rotazione a velocità angolare* ***ω****.*

- *Se la massa è proporzionale alla frequenza ed abbiamo a che fare con una rotazione, si potrà ipotizzare che la massa sia proporzionale alla velocità angolare* ***ω = 2∗π∗f*** *e sia una proprietà ad essa strettamente correlata.*

Dimostrazione 1

Ammettiamo che, per la medesima particella **(FOTONE)**, valgano ambedue le:
$\mathbf{E = m{*}c^2}$
$\mathbf{E = h{*}f}$
Uguagliandole, si ottiene:
$\mathbf{m{*}c^2 = h{*}f}$
da cui si ricava:
$\mathbf{m = (h / c^2) {*} f}$ $\qquad [\, l^2 m\, t^{-1}] \, [\, l\, t^{-1}]^{-2} [\, t^{-1}\,] = [\, m\,]$
Si deduce che **la massa di un fotone è proporzionale alla sua frequenza**.
Infatti: $\mathbf{f} {*} 6{,}626 {*} 10^{-34}/9{*}10^{16} = \mathbf{f {*} 0{,}7362{*}10^{-50}}$ **Kg** (nell'SI)
Per esempio, ad 1 GHz, la massa vale $0{,}7362{*}10^{-41}$ Kg = $7{,}362{*}10^{-39}$ g (nel Sistema CGS)

Nota

La legge di Coulomb, infatti, dice che:
$\mathbf{F = \hat{c} {*} (Q_1 {*} Q_2)/r^2}$
in cui $\mathbf{Q_1}$ e $\mathbf{Q_2}$ sono cariche elettriche,
ĉ è una costante,
r è la distanza che le divide ed

F la forza con cui si attraggono o si respingono, a seconda dei loro segni.
Assumendo che le due cariche siano uguali, si ha:

$$\mathbf{F = Q^2 / r^2}$$

dalla quale si può ricavare:

$$\mathbf{Q = (F * r^2)^{1/2}}$$

oppure, essendo $\mathbf{F = m * a}$, anche la:

$$\mathbf{Q = (m * a * r^2)^{1/2}} ,$$

le cui dimensioni sono, appunto: $[\, l^{3} m\, t^{-2}]^{1/2}$